

одної дещо по-своєму буде враховувати закономірності досліджуваного явища.

Оскільки результати прогнозування за будь-якою моделлю не є абсолютними і справджуються лише з певною ймовірністю, то для підвищення їхньої точності розрахунки можна виконувати за допомогою кількох моделей, а потім сформулювати остаточний прогноз.

3.7 Використання методів побудови різницевих сіток для моделювання наслідків техногенно-природних катастроф

Актуальність. Переважна більшість явищ та процесів, які потребують вивчення для підвищення екологічної безпеки країни, досліджуються за допомогою математичних моделей. Це пояснюється тим, що виконання натурних експериментів вимагає значних матеріальних чи часових затрат, або є небезпечним, оскільки може викликати серйозні негативні наслідки у випадку провалу експерименту, чи, навіть, неможливим. Згадані математичні моделі використовують, в залежності від області застосування, закони фізики, хімії, математики тощо. Наприклад, прогнозування зміни якості повітря, яка пов'язана як з природними явищами, так і з антропогенним впливом, потребує дослідження розповсюдження забруднювачів у атмосфері і визначається такими фізичними та хімічними процесами, як конвективне перенесення, дифузія, випадіння домішок та проходження хімічних реакцій. Зважаючи на складність цих процесів, для їх опису можна використовувати різні моделі, які відрізняються точністю, просторовими та часовими масштабами, врахованими параметрами тощо. Зазвичай для моделювання таких складних процесів використовуються диференціальні рівняння у частинних похідних або їх системи з деякими початковими та крайовими умовами.

Постановка задачі. В залежності від конфігурації області визначення, виду диференціального рівняння в частинних похідних, преференцій розробника тощо використовуються різні методи розв'язування. Серед них слід відзначити два сімейства методів: скінченних різниць³⁷ (MCP) та скінченних елементів³⁸ (MCE). В них обох для знаходження результату необхідно виконати деяку послідовність дій, а саме: побудувати сітку; замінити диференціальні рівняння на систему або системи алгебричних рівнянь; розв'язати

37 Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 592 с.

38 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов — М.: Мир, 1979. — 392 с.

отриману систему або системи. Саме перші два етапи найбільше впливають на точність розв'язку.

Виклад основного матеріалу. В МСР алгебричний аналог задачі одержують з диференціального рівняння застосуванням формул числового диференціювання. При цьому можна вимагати виконання законів збереження енергії, маси, кількості руху. У МСЕ вихідна диференціальна задача замінюється відповідною варіаційною задачею пошуку мінімуму функціонала, причому шука на функція апроксимується кусковою функцією і невідомими у кінцевій алгебричній задачі виступають коефіцієнти цієї апроксимації, які зазвичай співпадають із значеннями шуканої функції у вузлах.

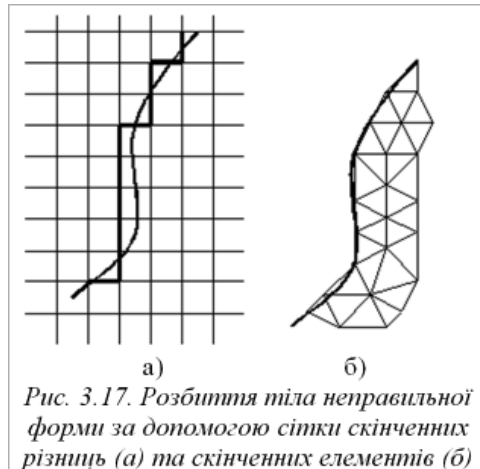


Рис. 3.17. Розбиття тіла неправильної форми за допомогою сітки скінченних різниць (а) та скінченних елементів (б)

Також, ці два сімейства методів відрізняються підходом до побудови сітки. МСР використовує регулярні сітки і особливості геометрії враховуються біля границь області визначення (рис. 3.171а). У зв'язку з цим він частіше використовується для аналізу задач з прямолінійними границями областей визначення. МСЕ використовує розбиття з урахуванням геометричних особливостей області починаючи з її границі (рис. 3.171б). Таким чином апроксимація функції буде кращою. Потім розбивають на елементи внутрішні області, при цьому алгоритм розбивання будується так, щоб елементи задовольняли деяким обмеженням, наприклад, сторони трикутників (елементів) не дуже відрізнялися по довжині. Тому дані методи використовуються у задачах зі складною геометрією області визначення.

Розглянемо детальніше методи побудови різницевих сіток, оскільки вони визначають кількість рівнянь у системах, які потрібно вирішити для отримання розв'язку задачі. Від того, як побудована сітка, залежить похибка розв'язку та кількість часу, необхідного комп'ютеру для виконання моделювання. Причому зазвичай чим щільніша сітка, тим точніший розв'язок³⁹.

Метод побудови сітки на вході отримує область, що містить колекцію характеристик, та повертає розбиту на комірки область. Такими характеристиками можуть бути точки, границі та, у багатовимірних випадках, полігональні поверхні – всі ці компоненти називаються кусково-лінійним комплексом⁴⁰.

За ідеологією побудови виділяють сітки⁴¹:

- структуровані (регулярні) (рис. 3.182а);
- неструктуровані (рис. 3.182б);
- гібридні.

Структурованість сітки полягає в тому, що вона являє собою упорядковану за відомими правилами структуру. Наприклад, у таких сітках з кожного внутрішнього вузла виходить однакова кількість ребер, які сполучають сусідні вузли. У розрахунковому просторі комірки сітки є топологічними прямокутниками/трикутниками (для двовимірних задач) або паралелепіпедами/пірамідами (тривимірний випадок).

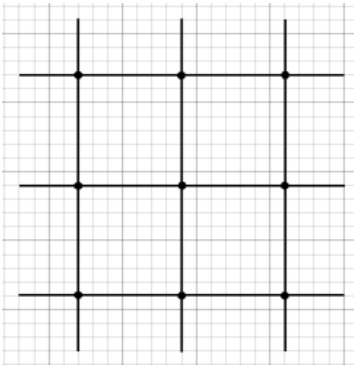
Характерною особливістю неструктурованих сіток є довільне розташування вузлів сітки у фізичній області визначення функції, тобто кількість ребер, які сполучають сусідні вершини, у кожного вузла може відрізнятися. Вузли сітки об'єднуються в багатогранники (тривимірний випадок) або багатокутники (двовимірний випадок) довільної форми. Найчастіше використовуються трикутні та тетраедричні комірки, але зустрічаються і чотирикутні та гексаедричні неструктуровані сітки⁴².

39 Shaw C. T. Using Computational Fluid Dynamics / C. T. Shaw. – Prentice Hall. – 1992. – 300 p.

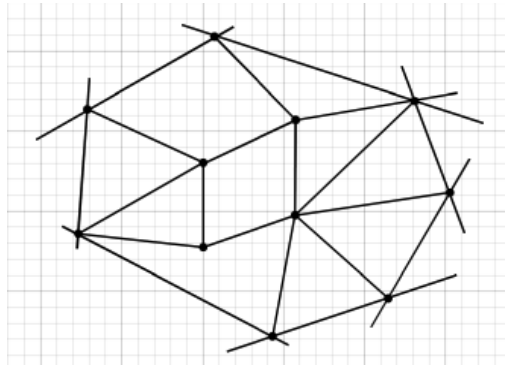
40 Иваненко С. А. Вариационные методы построения адаптивных сеток / С. А. Иваненко // Вычислительная математика и математическая физика. – 2003. – Т. 43, № 6. – С. 830-844.

41 Chapter 5. Grid generation [Electronic resource] // Research and Innovative Technology Administration. National Transportation Library. – Available at: <http://ntl.bts.gov/DOCS/ch5.html> (10.09.2014). – Caption from screen.

42 The Field: The AVS/Express Data Model [Electronic resource] // Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory. Visualization Group. – Available at: <http://vis.lbl.gov/NERSC/Software/express/help6.2/help/books/vizcons/02VTDataModel.html> 2 (10.09.2014). – Caption from screen.



а)



б)

Рис. 3.18.2 Структурована (а)
та неструктурована (б) сітки у площині

Підхід із використання структурованих сіток зручніший у частині розробки алгоритму та його програмної реалізації. Також слід зазначити, що існує значна кількість методів побудови таких сіток.

Найголовніша перевага неструктурованих сіток полягає у тому, що за умови їх використання можна побудувати сітку на розрахунковій області будь-якої складності. Однак ці сітки мають суттєві недоліки, а саме: досить складно підібрати алгоритм розрахунку задачі; даний метод вимогливий щодо ресурсів комп'ютера, зокрема потребує значного обсягу оперативної пам'яті та високої частоти процесора.

Гібридні сітки комбінують регулярні та неструктуровані області сітки. Даний підхід дозволяє комбінувати переваги обох методів та знизити вплив недоліків. Для їх побудови необхідно розробити розрахунковий алгоритм, що містить процедуру для перемикання розрахункових схем на різних сітках і, в разі необхідності, процедуру перенесення розрахункової інформації з одного типу сітки на інший.

Останнім часом набувають популярності модифікації структурованих сіток, що полягають у збільшенні кількості вузлів у зонах різкої зміни шуканої функції та зменшенні вузлів у областях, де вона мало або плавно змінюється. Таким чином, вони дозволяють підвищити точність розрахунку і в той же час скоротити розмірність систем рівнянь, які потрібно розв'язува-

ти на кожному кроці MCP або MCE, що, у свою чергу, скорочує час розрахунку.

Для визначення областей, де потрібно змінювати крок різницевої сітки, використовується числовий сенсор⁴³. Тобто на кожному кроці за часом у методі з рухомою сіткою при розв'язуванні нестационарних задач виконуються наступні кроки⁴⁴:

1) оцінюється похибка результату: якщо вона перевищує певне задалегідь задане значення, то результати розрахунку даного кроку анулюються і розрахунок цього кроку починається з початку з іншими значеннями кроків;

2) вибираються нові значення кроків за часом та просторовими змінними таким чином, щоб при максимальному значенні кроків похибка знаходилася у заданих межах.

Такий метод дозволяє побудувати адаптивну сітку, яка необхідна для кластеризації точок сітки в областях, де це найбільш необхідно, зберігаючи грубу сітку в інших місцях⁴⁵. Є два головні підходи до отримання адаптивної сітки: адаптивний перерозподіл сітки⁴⁶, що також називається *p*-покращення або mesh adaptation (рис. 3.19), та адаптивне покращення сітки⁴⁷, що також називається *h*-покращення⁴⁸ або mesh enrichment (рис. 3.20).

Метод адаптивного перерозподілу сітки полягає у постійному переміщенні фіксованої кількості комірок для покращення розподілу в обраних областях. Слід відмітити,

43 An adaptive multiresolution scheme with local time stepping for evolutionary PDEs / M. O. Domingues, S. M. Gomes, O. Roussel [et al.] // Journal of Computational Physics. – 2008. – Vol. 227, No 8. – P. 3758-3780.

44 Handling different *h* and *p* refinements in the framework of Spectral Difference Method I. Marter [Electronic resource] // Universite de pau et des pays de l'adour. – 2013. – 85 p. – Available at: http://www.cerfacs.fr/~cfdbib/repository/WN_CFD_13_46.pdf (10.09.2014).

45 Li Y. Comparison of *h*- and *p*- Adaptations for Spectral Difference Methods [Electronic resource] / Yi Li, Sachin Premasathan, Antony Jameson // 40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit 2010. – Available at: <http://aero-comlab.stanford.edu/Papers/AIAA-2010-4435-527.pdf> (10.09.2014).

46 Berger M. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations / M. Berger, J. Oliger // Journal of Computational Physics. – 1984. – Vol. 53. – P. 484-512.

47 Sun D. K. Adaptive mesh refinement, *h*-version, for solving multiport microwave devices in three dimensions / D. K. Sun, C. Zoltan, J.-F. Lee // IEEE Trans. Magn. – 2000. – Vol. 36(4). – P. 1596-1599.

48 DeFord J. Adaptive mesh refinement for particle-tracking calculations / J. DeFord, B. Held, J. J. Petillo // Proceedings of PAC07. – 2007. – P. 3600-3602.

що в цьому випадку кількість вузлів залишається завжди незмінною, змінюється лише їх положення. Незважаючи на те, що таку сітку легше будувати, цей метод має деякі недоліки, а саме залишкове згущення сітки в місцях де не має для цього необхідності.

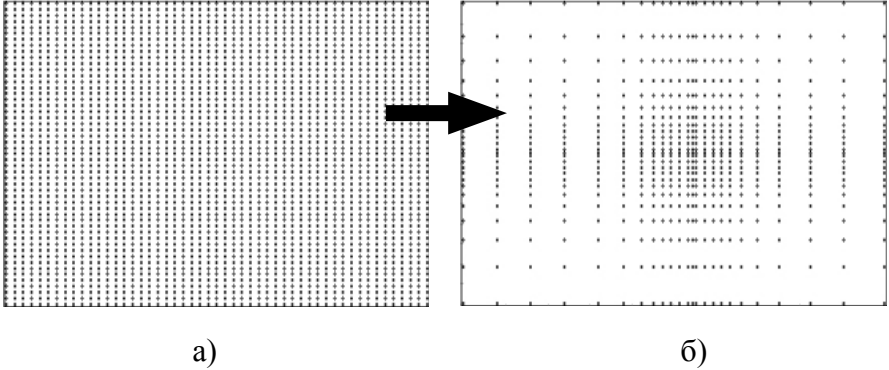


Рис. 3.19. Адаптивний перерозподіл сітки:
вихідна сітка (а) та результуюча сітка (б)

Метод адаптивного покращення сітки полягає у додаванні нових комірок у областях з різкою зміною функції розв'язку і видаленні інших комірок в областях, де вони більше не потрібні. Однак цей метод також має свої недоліки, основним з яких є складність переходу між областями сітки з різною щільністю вузлів.

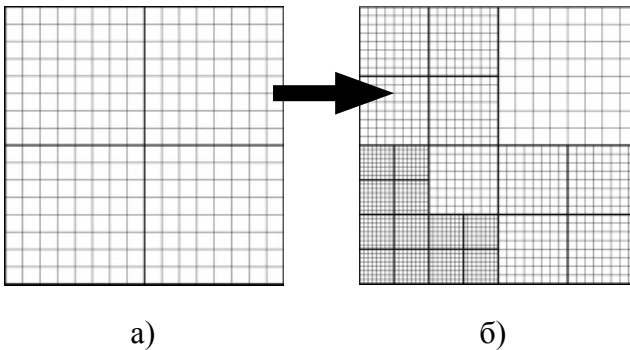


Рис. 3.20. Адаптивне покращення сітки:
вихідна сітка (а) та результуюча сітка (б)

Висновок. Використовуючи наведені адаптивні методи можна зменшити похибку розв'язку і час виконання моделювання за рахунок зменшення розмірності алгебричних систем, які потрібно розв'язувати на останньому етапі методів скінченних різниць або елементів. Однак побудова таких сіток вимагає проведення додаткових розрахунків для визначення нових координат вузлів та інтерполяції значень шуканої функції на нові сітки.

3.8 Модель оптимального управления деятельностью многоотраслевого предприятия в условиях технико-экологического происшествия

Актуальность. В 2014 г. исполняется 100 лет с момента развязывания первой мировой войны. К числу многочисленных последствий этого и подобных событий, как известно, относятся масштабные разрушения экономической инфраструктуры и многочисленные человеческие жертвы затронутых этими событиями территорий и народов. В частности, подобные деструктивные процессы в новейшей истории человечества всегда являются закономерными следствиями протекания природных высокоэнергетических процессов либо применения высокотехнологичных искусственных источников энергии большой мощности в зоне конфликта или техно-экологического происшествия (ТЭП). И всякий раз по окончании воздействия названных деструктивных факторов возникает актуальная задача быстрее всего восстановить инфраструктуру и экономику каждой пострадавшей страны.

Новизна работы. В связи с названной актуальной проблемой авторы предлагают достаточно эффективный метод скорейшего восстановления N -отраслевой экономики страны после воздействия крупного ТЭП или внешней агрессии. Предлагаемый метод основан на использовании теории «затраты–выпуск» лауреата Нобелевской премии В. В. Леонтьева⁴⁹.

В данной работе предлагается модель интеллектуального оптимального управления деятельностью многоотраслевого предприятия как составляющей финансово-экономической деятельности региона, управляемого «Центром» на основе оптимального управления работой региональных рентабельных и изначально нерентабельных предприятий.

⁴⁹ Леонтьев В. В. Теории, исследования, факты и политика. – Политиздат. - 1990. – 408 с.